Applications - Chapitre 3

Frottements et balistique

A.3.1 Equation différentielle du premier ordre

- Equation différentielle : équation liant une fonction $f(t)$ et ses dérivées première, seconde et d'ordre supérieur par rapport à t.
- Equation différentielle linéaire inhomogène du premier ordre : équation linéaire liant une fonction $f(t)$ et sa dérivée première :

$$\frac{df}{dt}(t) = -\,\alpha\, f(t) - \beta \qquad \text{où} \qquad \alpha, \beta = \text{cstes} \neq 0 \tag{A.3.1}$$

- Equation différentielle : $(A.3.1)$ remise en forme $(\alpha \neq 0)$

$$\frac{df}{dt}(t) = -\,\alpha\left(f(t) + \frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{A.3.2}$$

- Changement de “variable” : fonction $g(t)$ rendant l'équation différentielle $(A.3.2)$ homogène :

$$g(t) = f(t) + \frac{\beta}{\alpha} \tag{A.3.3}$$

- Dérivée première : changement de “variable” $(A.3.3)$

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{df}{dt}(t) \tag{A.3.4}$$

- Equation différentielle homogène : à partir de l'équation différentielle inhomogène en substituant $(A.3.3)$ et $(A.3.4)$ dans $(A.3.2)$:

$$\frac{dg}{dt}(t) = -\,\alpha\, g(t) \tag{A.3.5}$$

- Equation différentielle homogène :

$$\frac{dg(t)}{g(t)} = -\,\alpha\, dt \tag{A.3.6}$$

- Intégration : $(A.3.6)$ sur $t' \in [0, t]$

$$\int_{g(0)}^{g(t)} \frac{dg'(t')}{g'(t')} = -\,\alpha \int_0^t dt' \tag{A.3.7}$$

où $t \to t'$ et $g(t) \to g'(t')$ pour distinguer les variables et fonctions dans les intégrants et les bornes d'intégration.

- Résultat de l'intégrale : $(A.3.7)$

$$\ln\left(\frac{g(t)}{g(0)}\right) = -\,\alpha\, t \tag{A.3.8}$$

- Exponentiation : $(A.3.8)$

$$\frac{g\,(t)}{g\,(0)} = \exp\left(\ln\left(\frac{g\,(t)}{g\,(0)}\right)\right) = \exp\left(-\,\alpha\,t\right) \qquad (A.3.9)$$

- Solution : équation différentielle homogène

$$g\,(t) = g\,(0)\,\exp\left(-\,\alpha\,t\right) \qquad (A.3.10)$$

- Changement de "variable" : inverse de $(A.3.3)$

$$f\,(t) = g\,(t) - \frac{\beta}{\alpha} \qquad (A.3.11)$$

- Condition initiale : $(A.3.11)$ évalué en $t = 0$

$$g\,(0) = f\,(0) + \frac{\beta}{\alpha} \qquad (A.3.12)$$

- Solution : équation différentielle inhomogène $(A.3.11)$, $(A.3.12)$ dans $(A.3.10)$

$$f\,(t) = \left(f\,(0) + \frac{\beta}{\alpha}\right)\exp\left(-\,\alpha\,t\right) - \frac{\beta}{\alpha} \qquad (A.3.13)$$

- Mouvement balistique vertical : axe vertical Oz orienté vers le haut

1. Vitesse verticale : $f(t) \equiv v(t)$
2. Vitesse verticale relative : $g(t) \equiv u(t)$
3. Paramètre : $\alpha \equiv \dfrac{1}{\tau}$ où $\tau =$ temps d'amortissement
4. Paramètre : $\beta \equiv g$ où $g =$ champ gravitationnel

$$(A.3.2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(v(t) + g\tau\right)$$

$$(A.3.3) \quad \Rightarrow \quad u(t) = v(t) + g\tau \quad \Rightarrow \quad v(t) = u(t) - g\tau$$

$$(A.3.10) \quad \Rightarrow \quad u(t) = u(0)\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

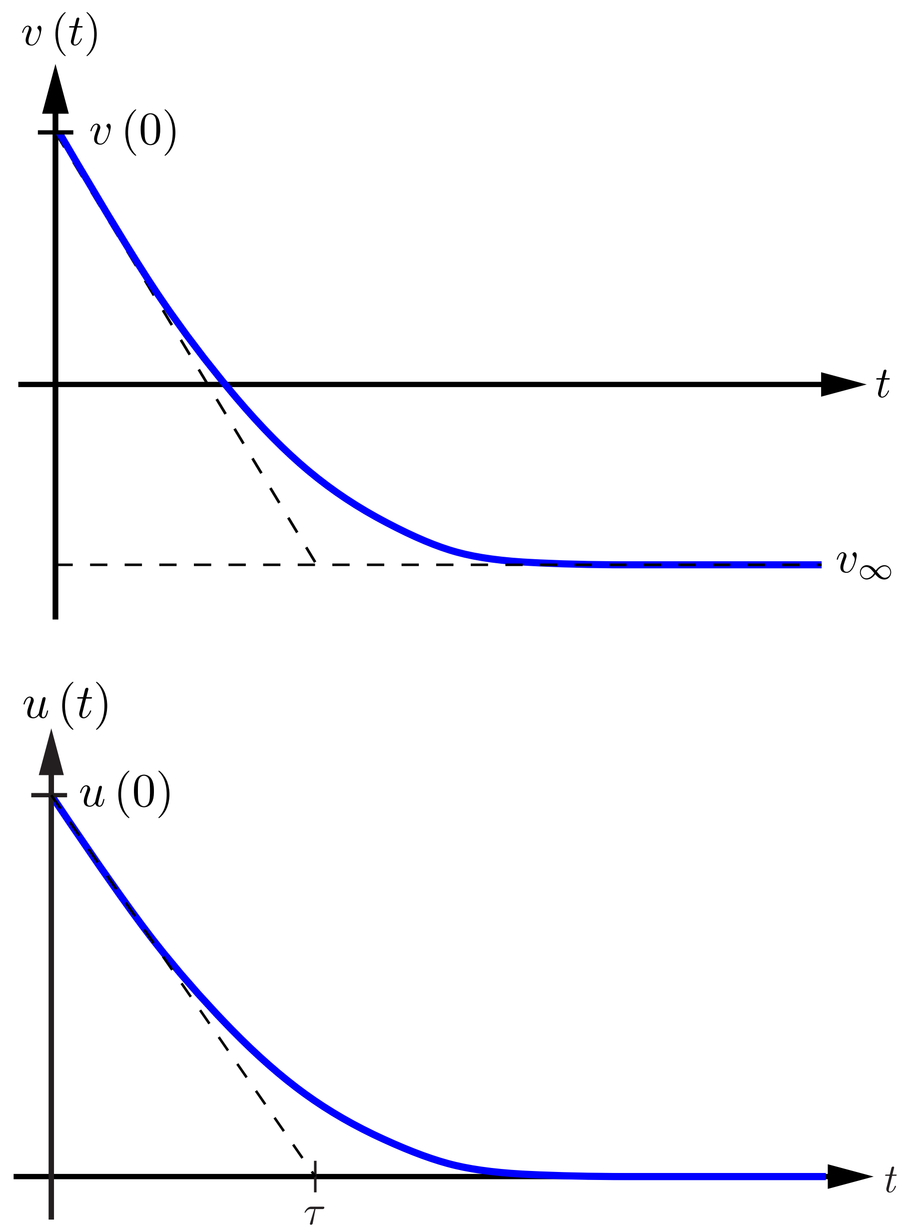
$$(A.3.13) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \left(v(0) + g\tau\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\tau$$

- Interprétation physique :

$$v(t) = u(t) - g\tau$$

- Vitesse limite de chute :

$$v_\infty = -g\tau \quad \Rightarrow \quad v(t) = u(t) + v_\infty$$



1. $v(t)$ est la vitesse verticale de chute par rapport au référentiel d'inertie du sol.

2. $u(t)$ est la vitesse verticale relative de chute par rapport au référentiel d'inertie qui se déplace à vitesse limite v_∞ par rapport au référentiel d'inertie du sol.

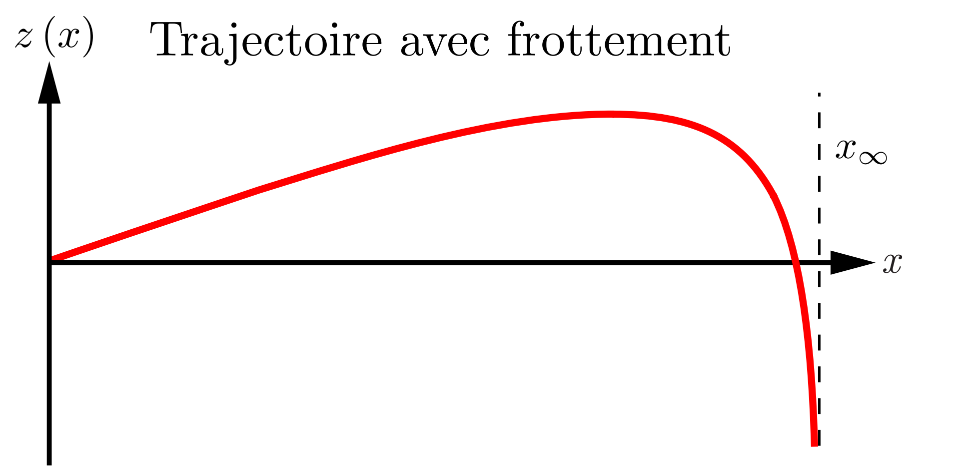
1. Trajectoire avec frottement : (3.54)

$$z(x) = \left(v_{0z} - v_\infty\right)\tau\,\frac{x}{x_\infty} - v_\infty\,\tau\,\ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right)$$

Développement limité au 2^{e} ordre en x/x_∞ (i.e. $x_\infty \to \infty$) :

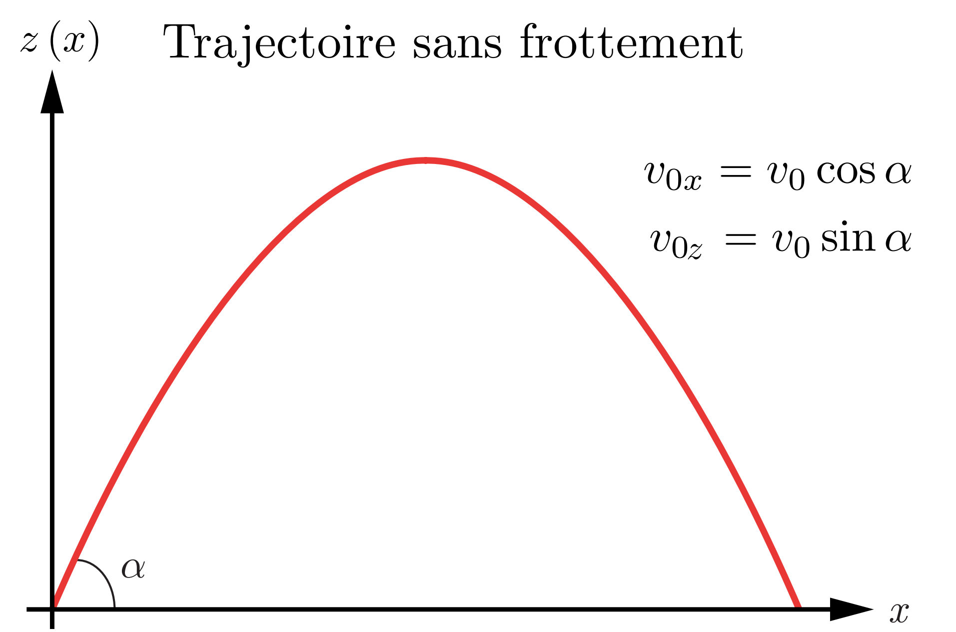
$$\ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \simeq -\frac{x}{x_\infty} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_\infty}\right)^2$$

$$z(x) \simeq \left(v_{0z} - \cancel{v_\infty}\right)\tau\,\frac{x}{x_\infty} - v_\infty\,\tau\left(\cancel{-\frac{x}{x_\infty}} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{x_\infty^2}\right)$$



2. Trajectoire sans frottement :

$$z(x) = \frac{1}{2}\,\frac{v_\infty\,\tau}{x_\infty^2}\,x^2 + \frac{v_{0z}\,\tau}{x_\infty}\,x$$



- Trajectoire sans frottement : $v_\infty = -\,g\tau$ et $x_\infty = v_{0x}\,\tau$

$$z\,(x) = \frac{1}{2}\,\frac{v_\infty\,\tau}{x_\infty^2}\,x^2 + \frac{v_{0z}\,\tau}{x_\infty}\,x = -\,\frac{1}{2}\,\frac{g}{v_{0x}^2}\,x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\,x \qquad (A.3.14)$$

- Trajectoire sans frottement : $(A.3.14)$ $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ et $v_{0z} = v_0\sin\alpha$

$$z\,(x) = -\,\frac{1}{2}\,\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + \tan\alpha\,x \qquad (3.16)$$

Le développement limité au 2^{e} ordre en x/x_∞ lorsque $x_\infty \to \infty$ de la trajectoire avec frottement redonne la trajectoire sans frottement. Ainsi, au 2^{e} ordre en x/x_∞ les frottements s'annulent.

- La correction principale due au frottement est donnée au 3^{e} ordre :

$$\ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \simeq -\,\frac{x}{x_\infty} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_\infty}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x_\infty}\right)^3 \qquad (A.3.15)$$

- Trajectoire avec frottement au 3^{e} ordre en x/x_∞ : $(A.3.15) \quad\Rightarrow\quad (3.54)$

$$z\,(x) = \frac{1}{3}\,\frac{v_\infty\,\tau}{x_\infty^3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,\frac{v_\infty\,\tau}{x_\infty^2}\,x^2 + \frac{v_{0z}\,\tau}{x_\infty}\,x \qquad (A.3.16)$$

- Trajectoire avec frottement : $(A.3.16)$ $v_{\infty} = -\, g\tau$ et $x_{\infty} = v_{0x}\,\tau$

$$z\left(x\right) = -\,\frac{1}{3}\,\frac{g}{v_{0x}^{3}\tau}\,x^{3} - \frac{1}{2}\,\frac{g}{v_{0x}^{2}}\,x^{2} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\,x \qquad (A.3.17)$$

- Portée : distance de tir en x lorsque $z = 0$:

$$(A.3.17) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\,\frac{g}{v_{0x}^{3}\tau}\,x^{3} + \frac{1}{2}\,\frac{g}{v_{0x}^{2}}\,x^{2} - \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\,x = 0 \qquad (A.3.18)$$

- En multipliant cette équation par $3\,v_{0x}^{3}\tau/gx$, on obtient :

$$x^{2} + \frac{3}{2}\,v_{0x}\tau\,x - 3\,\frac{v_{0x}^{2}v_{0z}\tau}{g} = 0 \qquad (A.3.19)$$

- Les solutions de cette équation du 2^{e} degré en x sont :

$$x = -\,\frac{3}{4}\,v_{0x}\tau \pm \sqrt{\frac{9}{16}\,v_{0x}^{2}\tau^{2} + 3\,\frac{v_{0x}^{2}v_{0z}\tau}{g}} \qquad (A.3.20)$$

- La solution avec le signe "$-$" est à rejeter :

$$x = \frac{3}{4}\,v_{0x}\tau\left(-\,1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\,\frac{v_{0z}}{g\tau}}\right) \qquad (A.3.21)$$

A.3.3 Portée d'un tir balistique avec frottement

- Portée au 3^e ordre en x/x_{∞} lorsque $x_{\infty} \to \infty$ et ainsi $\tau \to \infty$:

$$x = \frac{3}{4} v_{0x} \tau \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{v_{0z}}{g\tau}} \right) \qquad (A.3.21)$$

- Développement limité au 2^e ordre en $16\, v_{0z}/3\, g\tau$ de la racine carrée :

$$\sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{v_{0z}}{g\tau}} \simeq 1 + \frac{8}{3} \frac{v_{0z}}{g\tau} - \frac{32}{9} \frac{v_{0z}^2}{g^2\tau^2} \qquad (A.3.22)$$

- Avec ce développement limité, la portée devient un polynôme : $(A.3.23)$

$$x = \frac{3}{4} v_{0x} \tau \left(-\cancel{1} + \cancel{1} + \frac{8}{3} \frac{v_{0z}}{g\tau} - \frac{32}{9} \frac{v_{0z}^2}{g^2\tau^2} \right) = 2 \frac{v_{0x} v_{0z}}{g} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{v_{0z}}{g\tau} \right)$$

- Formule de trigonométrie : $2\, v_{0x} v_{0z} = 2\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha = v_0^2 \sin(2\alpha)$

$$x = \underbrace{\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}_{\text{sans frottement}} \left(1 - \underbrace{\frac{4}{3} \frac{v_0 \sin\alpha}{g\tau}}_{\text{correction principale}} \right) < \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \qquad (A.3.24)$$